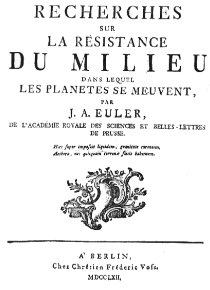
Ricerche sulla Resistenza del Mezzo nel quale i Pianeti si muovono

di J.A Euler
dell'Accademia Reale delle Scienze e delle Lettere di Prussia

16 febbraio 2021


RECHERCHES
SUR
LA RÉSISTANCE
DU MILIEU
DANS LEQUEL
LES PLANETES SE MEUVENT,
PAR
J. A. EULER,
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE PRUSSE.

Hæ: super imposuit liquidum, gravitate carentem, Aethera, ne: quicquam terrenæ fæcis habentem.

A' BERLIN,
Chez Chrétien Fréderic Voss.
MDCCLXII.

traduzione: prof. Gianluigi Trivia

Avvertenza

Questo scritto è stato composto per rispondere alla questione proposta dall'Accademia Reale delle Scienze di Parigi per l'anno in corso 1762. Il signor Abate Boffur, Professore Reale di Matematiche della Scuola del Genio a Mezierès per ottenere il premio; e la prima *menzione onorevole* è stata aggiudicata all'Opera di cui mi dichiaro pubblicamente l'Autore. L'elogio con il quale l'Accademia ha voluto ben parlare nel suo Programma, giustifica questa pubblicazione, e consente di sperare che giudici competenti lo accolgano favorevolmente.

Si chiedeva:

I pianeti si muovono in un mezzo la cui resistenza produce qualche effetto sensibile sul loro movimento?

Per rispondere a questa domanda bisogna esaminare tre cose.

In primo luogo, bisogna approfondire la natura del mezzo nel quale i Pianeti si muovono.

In secondo luogo, chiedersi se questo mezzo è in grado di produrre qualche alterazione sul movimento dei Pianeti?

Infine, determinare con un calcolo esatto le perturbazioni che effettivamente ne risultano.

Capitolo 1

Sulla Natura del Mezzo nel quale i Pianeti si Muovono

Non si andrà a sostenere che lo spazio nel quale i Pianeti si muovono sia un vuoto perfetto. Senza parlare di ulteriori altre ragioni, la luce prova da sola in modo sufficiente che tutto lo spazio del Cielo è riempito di questa materia sottile in cui si formano i raggi luminosi.

Se i raggi di luce fossero delle emanazioni effettive dei corpi luminosi, lanciati con questa prodigiosa velocità, che fa loro percorrere lo spazio immenso dal Sole fino a noi in meno di otto secondi di tempo, sarebbero essi stessi emanazioni luminose di cui tutto lo spazio dei Cieli risulterebbe riempito, e che lo attraverserebbero in tutti i sensi con una uguale rapidità.

Ma, sebbene il grande Newton abbia sostenuto questa opinione, essa è soggetta a tali e tanti inconvenienti, che io credo di doverla abbandonare, e abbracciare quella che spiega la propagazione della luce in un modo simile a quella del suono.

Senza parlare dell'impoverimento che i corpi dovrebbero soffrire seguendo l'opinione di Newton, per il solo fenomeno di parecchi raggi luminosi che passando senza confondersi in uno stesso punto li distrugge completamente.

È contro i Principi meglio stabiliti dalla Meccanica, che parecchie particelle, ...omissis, che passano contemporaneamente per lo stesso punto e da tutte le direzioni, con una velocità così prodigiosa come quella della luce, senza urtarsi e senza intralciare il reciproco movimento.

O, d'altro canto, noi sappiamo non solamente dall'esperienza, che parecchi suoni attraversano lo steso punto senza interferire, ma Mr. de la Grange ha mostrato molto chiaramente, nelle Memorie della Società di Torino, che questo fenomeno è in perfetto accordo con i principi della Meccanica, e che non è una conseguenza necessaria.

Passo sotto silenzio le molte altre ragioni, che i Filosofi più illuminati hanno già prodotto, e che non lasciano alcun dubbio, sul fatto che la luce non sia prodotta dai corpi luminosi allo stesso modo in cui il suono è prodotto dai corpi sonori, e che la propagazione nell'uno e nell'altro caso non segua le stesse leggi.

É necessario che tutto lo spazio del Cielo sia riempito di una materia adatta a trasmettere i piccoli impulsi o vibrazioni che costituiscono la natura della luce, tutto come sappiamo attualmente dalle felici ricerche di Mr. de la Grange che il suono è trasmesso dall'aria.

Da ciò deriva che questa materia celeste deve essere fluida e simile all'aria, in aggiunta a un certo grado di densità e di elasticità per produrre nella propagazione della luce la stessa velocità che l'esperienza ci permette di conoscere.

Ora, poiché la velocità della luce è nota, essendo circa 600 mila volte più grande di quella del suono, possiamo inferire un rapporto evidente tra questo mezzo celeste e la nostra aria.

Sappiamo che la velocità delle vibrazioni trasmesse attraverso un mezzo elastico è come la radice quadrata dell'elasticità divisa per la densità; se poniamo l'elasticità di questo mezzo m volte maggiore, e la densità n volte minore di quella dell'aria, avremo

$$\sqrt{nm} = 600000 \qquad o \quad meglio \qquad mn = 360\,mila\,milioni \quad [3.6 \cdot 10^{11}]$$

Di modo che, se conosciamo l'elasticità di tale mezzo, ne potremo derivare la sua densità e viceversa; per esempio, se la sua elasticità fosse 600 mila più volte maggiore di quella dell'aria, la sua densità sarebbe precisamente altrettante volte più piccola.

Mi sia permesso di conservare a questo mezzo il nome di *Etere*, sebbene assuma idee diverse da quelle avute dagli antichi Filosofi.

L'Etere è stato prima assegnato, rimane da sottolineare che è una *materia* fluida ed elastica, simile all'aria, ma che è diversa da questa sia per la sua densità che per la sua elasticità; e, sebbene noi non possiamo determinare né l'una né l'altra separatamente, sappiamo che, ponendo l'elasticità dell'etere m volte più grande, e la sua densità n volte più piccola di quella della nostra aria, il prodotto di questi due numeri nm deve essere uguale a 360 mila milioni.

Non vi è alcun dubbio che l'uno e l'altro di questi due numeri non sia troppo grande; poiché l'aria via via si sale diviene sempre più rarefatta fino a perdersi infine nell'etere, bisogna che l'etere sia incomparabilmente più rarefatto dell'aria; poi, se l'elasticità dell'etere è la causa della coesione, della durezza e della forza dei corpi terrestri, come sembrerebbe assai verosimile, è necessario che l'elasticità sia per lo meno mille volte più grande di quella dell'aria.

Oppure, supponendo l'elasticità dell'etere mille volte più grande di quella dell'aria, la sua densità sarà 360 milioni di volte più piccola di quella dell'aria, e se si supponesse l'elasticità dell'etere cento volte quella dell'aria, la densità diverrebbe ancora dieci volte più piccola.

Poiché siamo sicuri che i Pianeti non patiscono alcuna resistenza sensibile nel loro movimento, ne segue necessariamente che la materia o l'etere nel quale i Pianeti si muovono, è parecchie migliaia di volte più rarefatta dell'aria, e ciò è in accordo perfettamente con ciò che la velocità della luce ci mostra.

Un piede cubico di etere racchiuderà pertanto molte migliaia di volte meno materia di un metro cubo d'aria, e poiché l'aria è 800 volte più leggera dell'acqua e quest'ultima 19 volte più leggera dell'oro, se supponiamo l'etere 360 milioni di volte più rarefatto dell'aria, un piede cubico d'etere conterrà 19.800.360 milioni meno materia di un piede cubico d'oro; o meglio un piede cubico d'oro conterrà tanta materia quanta 5472 migliaia di milioni piedi cubici d'etere, o ancora che un cubo d'etere il cui lato sarebbe 17500 piedi o pressapoco una lega francese [$4,445km$].

Qui si presenta d'altro canto una questione molto interessante: *sarebbe possibile dividere e ridistribuire la materia di un piede cubico d'oro in modo che essa riempia una lega cubica?*

So bene che Keill ha preteso di aver dimostrato la possibilità, avendo provato che gli intervalli tra le particelle potrebbero divenire minori di una quantità data, per quanto piccola possa essere; ma l'elasticità sembra assolutamente esigere che le particelle nelle condizioni minime si toccherebbero e si troverebbero in una condizione di continuità, per cui pur rendendo omaggio a Keill per aver dimostrato la possibilità, a meno che non si voglia dare alle particelle una forma lineare quasi geometrica, in modo che esse si tocchino come i punti: ma una tale struttura sarebbe troppo rivoltante per essere introdotta nella Fisica.

Credo piuttosto che si possa arditamente negare che sia possibile formare una lega cubica di etere da un piede cubico di oro mediante riduzione continua, sebbene la quantità di materia sia da una parte e dall'altra la stessa.

Vi è qui un equivoco che sembra aver tratto in inganno tutti quelli che hanno scritto in precedenza.

Per mettere questo argomento in tutta la sua luce, comincio da una osservazione generale, cioè sapere che in tutti i corpi è necessario distinguere la *loro estensione reale* dalla loro *massa*, o dalla *quantità di materia* di cui sono composti.

Ora io definisco l'*estensione reale* di un corpo il volume, o la solidità geometrica, che rimarrebbe se ne togliessimo tutto il volume apparente tra gli spazi di cui è riempito.

Si sa che lo stesso oro è completamente riempito di pori; per cui l'*estensione reale* di una massa d'oro sarà sempre molto più ridotto del suo volume apparente.

L'*estensione reale* di ogni corpo è una quantità geometrica e pertanto ben diversa dalla *quantità di materia* o dalla *massa*, che è una quantità meccanica, in virtù della quale i corpi si oppongono alla variazione del loro stato. È quindi l'*Inerzia* e questi termini, *quantità di materia, massa* e *inerzia* significano la stessa cosa.

Le Esperienze sulla gravità provano sufficientemente che il peso di ogni corpo è proporzionale alla sua massa o alla sua inerzia. Pertanto, poiché un piede cubico d'oro è 19 volte più pesante di un piede cubico d'oro, è certo che il primo contiene 19 volte più materia della seconda; ma non ne segue che l'*estensione reale* dell'oro sia 19 volte più grande dell'estensione reale dell'acqua; orbene sarebbe possibile ridurre una massa d'acqua, togliendo tutti i suoi pori, a un volume oltre 19 volte più piccolo.

Non è ancora dimostrato che due corpi, le cui masse siano uguali, abbiano anche la stessa estensione reale, e non vedo alcuna necessità del perché due estensioni uguali di materia abbiano sempre la stessa inerzia ? o perché la quantità meccanica dovrebbe sempre seguire quella geometrica ?

Tuttavia, quando riflettiamo sulla causa della gravità, benché essa ci sia sconosciuta, sembra che non la si possa cercare nella pressione di un fluido estremamente sottile, che passa liberamente attraverso i più piccoli pori dei corpi. Ora una tale pressione agisce sempre in ragione dei volumi e stabilito ciò, il peso di ogni corpo sarebbe sempre proporzionale all'estensione reale. Pertanto, poiché il peso è anche proporzionale all'inerzia, o alla massa di ogni corpo, se ne deduce che l'estensione reale è sempre proporzionale all'inerzia, come quasi tutti i Filosofi hanno creduto fin qui.

Ma qualunque sorte possa subire questo argomento, non riguarda che i corpi terrestri sui quali agisce la gravità e per la stessa ragione essa agisce anche su tutti i corpi grezzi di cui sono composti i Pianeti, poiché essi sono sottoposti alla stessa legge di gravitazione.

Non possiamo però dedurre ancora nulla di certo sulle materie [..subriles] distribuite in tutto il mondo e che non sono in apparenza assoggettate alla gravitazione, ma che ne contengono piuttosto la causa.

É tuttavia cosa da sottolineare che, benché non vediamo alcun legame tra l'*inerzia* e l'*estensione reale* di un corpo, tutti i corpi più grandi della Terra e di tutti gli altri Pianeti hanno questa proprietà, che in tutti l'inerzia è proporzionale all'estensione reale. Da cui sembra in effetti che esista tra l'inerzia e l'estensione reale qualche legame reale, ma del tutto sconosciuto; in virtù del quale una certa estensione di materia non potrebbe esistere senza che essa abbia una certa inerzia o massa.

Questa cosa può invitare a sostenere che tutti i corpi più grandi, pur con qualche differenza tra loro stessi, siano composti di una materia omogenea. Prendendo, per esempio, parecchi pezzi di materie diverse, ciascuno di una libbra, se li concepiamo privati dei pori, avranno tutti la stessa estensione e anche la stessa inerzia. Per cui, non avendo più pori, sarebbe difficile da dire, in che cosa tutti questi pezzi di materia differirebbero tra loro.

Ma sarebbe allora un'altra specie di materia e ve ne potrebbero essere ancora parecchie che potrebbero unire alla stessa estensione vera un'inerzia più piccola delle precedenti. L'ultimo grado, alla cui estensione non corrisponderebbe alcuna inerzia, sarebbe una estensione puramente geometrica e pertanto un vuoto autentico.

Ma, senza ammettere un tale vuoto, purché si combinino due specie di materia, di cui l'una contenga sotto la stessa estensione meno massa dell'altra, si è in grado di levare tutte le difficoltà che si introducono di solito contro il sistema del pieno.

Poiché nei corpi più grandi l'estensione vera è la più strettamente connessa all'inerzia e poiché l'inerzia di un corpo non potrebbe essere cambiata da qualche causa, ne segue che l'estensione vera di un corpo più grosso non subisca alcun cambiamento nella sua quantità.

Ma per le materie sottili può darsi che la loro natura sia del tutti differente a tale riguardo.

Sembrerebbe necessario che la stessa quantità conservi sempre la stessa inerzia; ma non sarebbe possibile che l'estensione vera, quella che esclude tutti i pori, divenga tanto più grande o tanto più piccola? Non sarebbe ancora possibile che una tale materia sia dotata della forza di estendersi continuamente e più a lungo nella sua propria sostanza, senza contenere pori o spazi vuoti? Non sarebbe sotto questo punto di vista un ingrandimento reale? È ben vero che per l'inerzia, che sembra costituire l'essenza della materia, un tale ingrandimento non potrebbe essere ammesso senza un miracolo.

In questo caso non sarebbe più imbarazzante della causa dell'elasticità dell'etere: ma non oso affondarmi in queste sublimi ricerche, esse sono al di sopra della mia portata e il soggetto attuale non lo esige.

Mi accontento di aver provato che è possibile che gli spazi del Cielo, per i quali i Pianeti sembrano muoversi liberamente, siano riempiti da una materia fluida estremamente sottile e molto elastica, senza supporli quasi vuoti, come si è obbligati a fare quando si associa dappertutto alla stessa inerzia la stessa estensione della materia.

Non solamente un simile vuoto urta la nostra mente, ma appare anche incompatibile con questa grande elasticità che si è obbligati ad assegnare all'etere, poiché è mediante l'etere che i raggi di luce dei corpi luminosi sono trasmessi fino a noi con la più grande velocità che conosciamo al mondo.

Attualmente, quando si dice che l'etere è mille volte più rarefatto dell'aria, non bisogna dedurre che l'estensione propria d'un certo volume d'etere sia altrettante volte più piccola di quella di un uguale volume d'aria, ma questa proporzione riguarda l'inerzia rinchiusa in volumi uguali.

Capitolo 2

Sulla RESISTENZA dell'ETERE

Si presenta la domanda, non è possibile che i Pianeti si muovano nell'etere senza subire la minima resistenza? Perché, sebbene essi non siano spinti indietro, non potrebbe succedere che possano essere sospinti in avanti con una uguale forza? Cercherò di rendere ciò più chiaro.

Quando un corpo si muove nell'etere, ne sposta continuamente una parte e ad esso imprime un movimento perdendone altrettanto; ma, poiché l'etere dietro il corpo è spinto dalla sua elasticità nel luogo che il corpo abbandona, sembra che possa accelerare il suo movimento tanto quanto sarà stato ritardato in avanti.

Questa opinione è stata sostenuta da grandi studiosi di Geometria, e l'hanno creduta conforme alla conservazione delle forze vive.

Essi sono d'accordo che dal primo istante, il corpo comunica all'etere una parte della forza viva per produrre il movimento mediante il quale l'etere spinto in avanti segue il corpo per un tratto; ma per il fatto che questo movimento è a sua volta generato, essi pretendono che sia sufficiente che l'etere accompagni il corpo per tutto il suo movimento, senza che quello abbia bisogno di subire una nuova perdita. Guardano infine questa conservazione come l'effetto della perfetta elasticità dell'etere; se i pianeti, dicono, perdessero continuamente il loro movimento, questa forza viva, o perirebbe completamente o si accumulerebbe dentro l'etere; ora l'una e l'altra cosa appaiono loro egualmente assurde.

Per quanto fondato possa apparire questo ragionamento, è distrutto dall'esperienza. Essendo l'aria un fluido affatto perfettamente elastico, dovrebbe almeno partecipare alla stessa qualità e causare una minore resistenza ai corpi che si muovono, ...

Ora noi sappiamo che tutti i corpi che si muovono nell'aria subiscono una resistenza molto considerevole e Mr Lulofs pretende di aver dimostrato mediante la forza che il vento esercita sulle pale dei mulini a vento, che la resistenza dell'aria è ancora più grande di quella che si trova mediante le leggi ordinarie della Meccanica.

È altrettanto incontestabile che una palla di cannone subisce una maggiore resistenza di quella data da quelle leggi, perché lascia dietro di sé uno spazio vuoto che l'aria non potrebbe riempire tanto rapidamente. Da cui bisogna concludere che, sebbene l'etere sia molto più elastico dell'aria, ciò non impedisce che non opponga una resistenza molto reale al movimento dei Pianeti.

Poiché i Pianeti si muovono incomparabilmente più veloci di una palla di cannone, se ne può concludere ugualmente che dietro l'etere ci sia una zona più rarefatta e nella parte anteriore più densa e più raggruppata che altrove.

Applicando ciò alla Terra, si vedrà che la maggiore rarefazione dell'etere corrisponde ai luoghi in cui vediamo il Sole tramontare e la maggiore densità nei luoghi in cui lo vediamo sorgere. Pertanto, soprattutto alla sera l'atmosfera sarà la meno carica di etere, e la più al mattino e questa variazione non mancherebbe di produrre fenomeni ben singolari.

Se l'elettricità è determinata da un disordine nello stato d'equilibrio dell'etere e se l'elettricità positiva abbia luogo dove l'etere si trova in troppo grande abbondanza, e la negativa, dove l'etere è troppo rarefatto, ne segue che soprattutto verso la sera domina nell'atmosfera una elettricità e verso il mattino una elettricità positiva. Si tratta pertanto di consultare l'esperienza, per sapere se una tale variazione ha luogo oppure no. Il mio scopo non mi permette di entrare in questa discussione.

Tuttavia, fino a che un corpo si muove nell'etere, non ne si può determinare la resistenza sulla stessa base che nell'aria o nell'acqua, dove tutta la superficie anteriore riceve la spinta del fluido. L'etere essendo una materia estremamente sottile, pervade quasi liberamente tutti i pori dei corpi ed è pressapoco come se un crivello si muovesse nell'aria o nell'acqua, che subirebbe senza dubbio una resistenza molto più piccola che non una superficie solida.

I Pianeti non incontrano dunque resistenza nell'etere fintanto che le loro parti solide impediscono che l'etere passi liberamente attraverso la loro massa.

Si vede pertanto che la resistenza determinata dalla legge ordinaria deve essere diminuita della parte che corrisponde al libero passaggio dell'etere; e quindi non si deve considerare che una certa parte della superficie del Pianeta che è esposta alla resistenza, e secondo tutta l'apparenza questa parte sarà molto piccola rispetto a tutta la superficie.

Oltre quella, l'obliquità con la quale le particelle solide sono urtate dall'etere, la resistenza può diminuire ancora in modo considerevole.

Immaginiamo un corpo sferico la cui massa sia uguale ad A e il raggio a, e che si muove con una velocità uguale a quella che un corpo pesante sulla terra acquisirebbe cadendo da un'altezza v. Sia la densità del corpo n volte maggiore di quella dell'etere, e secondo la legge comune, la resistenza del grande cerchio sarà espressa dal peso di un cilindro di etere di base a e altezza v; e pertanto il suo volume è uguale a πaav.

Ora essendo il volume del globo uguale a $\frac{4}{3}\pi r^3$ e la massa uguale ad A, la massa del cilindro, se fosse della stessa materia, sarebbe $\frac{3Av}{4a}$[1], da cui la massa del cilindro d'etere uguale a $\frac{3Av}{4a}$ e riducendo la massa A al peso che la stessa sfera avrebbe sulla terra, l'espressione trovata $\frac{3Av}{4a}$ esprimerà la resistenza del grande cerchio. Ma la resistenza della sfera essendo d'altronde due volte più piccola, sarà $\frac{3Av}{8na}$. Poi bisognerà diminuire ulteriormente a causa della penetrazione dell'etere e può anche essere a causa d'una più grande obliquità d'impulso.

Siccome dobbiamo accontentarci di sapere tale diminuzione in modo approssimato, e che a noi è impossibile determinarla a *priori*, poniamo la reale resistenza del globo uguale a $\frac{3Av}{8n\lambda a}$, dove secondo tutte le apparenze il numero λ deve essere assai considerevole o il numero n è prodigiosamente grande.

Se supponiamo che la densità dell'etere sia 360 milioni di volte più piccola di quella dell'aria e che la densità dei corpi sia uguale a quella dell'acqua, il numero n sarà 800×360000000 vale a dire 288 *mila milioni*.

Essendo inoltre l'estensione reale dei corpi per lo meno 19 volte più piccola di quella apparente, a causa della natura spugnosa, il numero λ potrebbe ben superare 10; per cui, ponendo per abbreviazione $\frac{3}{8n\lambda} = \mu$, il valore di questa frazione sarebbe circa $\mu = \frac{1}{10\,000\,000\,000}$ e diminuirebbe pressapoco allo stesso modo se il corpo fosse più o meno denso.

Ora, se supponiamo l'etere dieci volte meno denso, avremo per μ una frazione ancora dieci volte più piccola; inoltre siccome è assai probabile che il valore di λ sia considerevolmente più grande di 10, la frazione μ potrebbe essere ancora più piccola di $\frac{1}{10\,000\,000\,000}$. Si vedrà in seguito che la resistenza che ne risulta potrà essere ben confrontabile con le osservazioni.

Applichiamo ciò al movimento di un Pianeta, che si muove attorno al Sole su un cerchio.

Poiché sappiamo che l'effetto della resistenza dell'etere è estremamente piccola e che il movimento del Pianeta continuerà a ruotare su un cerchio per tempi molto lunghi, cerchiamo la diminuzione di questo movimento per un tempo qualunque.

Sia c la distanza del Pianeta dal Sole, v la sua velocità dovuta all'altezza e l'attrazione del Sole alla distanza $c = \frac{ff}{cc}$ prendendo come unitaria la gravità sulla terra.

Inoltre, poiché il movimento avviene su un cerchio, è necessario che la forza centrifuga espressa da $\frac{2v}{c}$ sia $= \frac{ff}{cc}$ e pertanto $v = \frac{ff}{2c}$: da ciò la resistenza dell'etere $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ff}{2ac}$ potrà essere vista come costante su tempi molto lunghi.

Si avrà quindi, mentre il Pianeta percorre lo spazio ds

$$dv = -\frac{\mu ff}{2ac} ds$$

e di conseguenza

$$v = \frac{ff}{2c} - \frac{\mu ffs}{2ac} = \frac{ff}{2c}\left(1 - \frac{\mu s}{a}\right)$$

Per meglio conoscere gli elementi di questa espressione, sia il periodo del Pianeta uguale a Θ secondi; il Pianeta completa pertanto in Θ secondi tutta la circonferenza di un cerchio il cui raggio è uguale a c o meglio $2\pi c$, esso percorrerà in un secondo uno spazio uguale a $\frac{2\pi c}{\Theta}$; la sua velocità sarà come quella sopra dovuta all'altezza v.

Ora, ponendo g per l'altezza per la quale un corpo grave cade in un secondo, lo spazio che il Pianeta percorre in un secondo è pure espresso da $2\sqrt{gv}$ da cui si ottiene

$$\begin{aligned} 2\sqrt{gv} &= \frac{2\pi c}{\Theta} \\ \sqrt{\frac{gff}{2c}} &= \frac{\pi c}{\Theta} \\ ff &= \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta^2} \end{aligned}$$

dove si conoscerà ad ogni distanza il rapporto tra la forza acceleratrice del Sole e quella della gravità naturale sulla Terra.

Sebbene il ritardo del movimento disturbi il moto circolare, prima di intraprendere le ricerche richieste per sviluppare questa questione, io considererò qui la cosa come se il Pianeta si muovesse su un canale circolare che gli impedisce di deviare. Questo caso, per quanto immaginario, non impedirà di conoscere dopo quanto tempo l'effetto della resistenza può divenire sensibile.

Come durante una rivoluzione il Pianeta percorre lo spazio $= 2\pi c$ e durante ν rivoluzioni, nel tempo di $\lambda\Theta$ secondi lo spazio $= 2\nu\pi c$, ponendo questo valore per s avremo per la velocità del Pianeta dopo questo tempo $v = \frac{ff}{2c}\left(1 - \frac{2\mu\nu\pi c}{a}\right)$ e la velocità stessa $Vv = \left(1 - \frac{2\mu\nu\pi c}{a}\right) V \frac{ff}{2c}$, da cui vediamo che la diminuzione della velocità vale la parte $\left(\frac{\mu\nu\pi c}{a}\right)$ della velocità iniziale.

Ci sia permesso di applicare queste formule al movimento della Terra:

[1] densità sfera: $d = \frac{M}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3A}{4\pi a^3}$ per cui la massa del cilindro, se fosse della stessa materia, sarebbe $m = V_{cilindro} d = \pi a^2 v \frac{3A}{4\pi a^3} = \frac{3Av}{4a}$

Avendo circa $c = 18000a$ e $\Theta = 31556930$", cerchiamo dopo quanto tempo la diminuzione della velocità potrebbe divenire $\frac{1}{31556930}$ poiché un cambiamento di un secondo nel periodo della Terra sarebbe già notevole.

Sia dunque $\frac{\mu\nu\pi c}{a} = 18000\mu\nu\pi = \frac{1}{31556930}$ e supponiamo che ciò arrivi dopo ν anni e avremmo $\nu = \frac{1}{18000\times 31556939\,\mu\pi}$.

Diamo a μ il valore indicato sopra, otterremo all'incirca $\nu = \frac{1000000000000}{18000\times 31556939\,\pi} = \frac{100}{18}$. Da ciò segue che un tale effetto potrebbe essere prodotto in 6 anni.

Ora, quando lo stesso valore di μ fosse ancora molto più piccolo, l'effetto della resistenza dell'etere sul movimento dei Pianeti potrebbe tuttavia divenire molto significativo dopo un numero assai grande di anni.

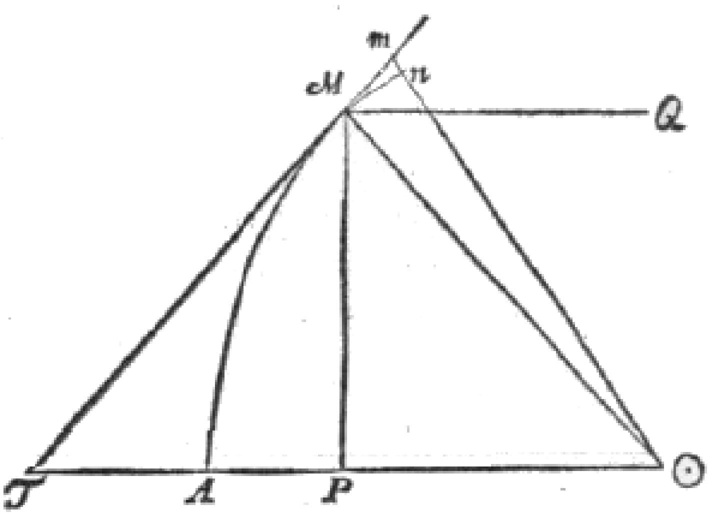
Ma non segue dalla diminuzione della velocità che il periodo debba divenire più lungo, deve risultare piuttosto un effetto totalmente contrario. Il Pianeta essendo rallentato nel suo movimento si avvicinerà di più al Sole e descriverà un'orbita più piccola alla quale corrisponderà necessariamente un periodo più breve.

Per questa ragione è necessario che la determinazione precedente sia giusta, e che anche il numero μ fosse molto esatto; altrimenti non sarebbe che lo sviluppo di un caso immaginario.

Il disturbo reale che la resistenza dell'etere può causare nel movimento di un Pianeta richiede ricerche molto più approfondite; esse saranno il soggetto della mia terza parte.

Capitolo 3

SULLA PERTURBAZIONE DEL MOVIMENTO DEI PIANETI CAUSATA DALLA RESISTENZA DELL'ETERE



Sia a il raggio di un Pianeta qualunque, A la sua massa e AM una parte della curva che esso descrive intorno al Sole che è indicato con $\odot$.

Si deve determinare la perturbazione che la resistenza dell'etere è in grado di produrre sul suo movimento.

Si ponga che questo Pianeta sia giunto nel punto M dopo un tempo di t secondi. Poniamo l'angolo con il Sole $A \odot M = \varphi$ e la distanza $M\odot = z$.

Sia la forza acceleratrice del Sole $= \frac{ff}{zz}$, e ho fatto vedere nella parte precedente che, se il periodo della Terra è di Θ secondi, la sua distanza media dal Sole $= c$ e g, l'altezza per la quale un corpo grave cade liberamente in un secondo, si avrà $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta^2}$; dove π identifica la semi circonferenza di un cerchio il cui raggio è $= 1$.

Questa forza $\frac{ff}{zz}$ agisce sul Pianeta in M secondo la direzione $M\odot$, se la scomponiamo secondo le direzioni fisse e ortogonali di coordinate

$$P\odot = \cos\varphi = x \qquad PM = z\sin\varphi = y$$

ne risulterà

1. Una forza lungo $MP = \frac{ff}{zz}\sin\varphi$
2. Una forza lungo $MQ = \frac{ff}{zz}\cos\varphi$

Per conoscere la velocità del Pianeta, dalla quale dipende la resistenza dell'etere, sia Mm l'elemento di spazio percorso nel tempo infinitamente piccolo dt, e a causa di $Mn = zd\varphi$ e $mn = dz$ avremo $Mm = V\left(dz^2 + zzd\varphi^2\right)$ che chiamerò per abbreviare con ds.

Facendo pertanto $dt : ds = 1'' : \frac{ds}{dt}$, otterremo lo spazio che il Pianeta percorrerà in un secondo $= \frac{ds}{dt}$.

Ora, prendendo v per l'altezza dovuta alla velocità del Pianeta nel punto M, questo stesso spazio sarà anche $= 2Vgv$; da cui deduciamo il valore $v = \frac{ds^2}{4gdt^2}$.

Siccome la forza acceleratrice della resistenza dell'etere è contraria al movimento, essa agirà secondo la tangente MT e seguirà i principi sopra stabiliti $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ds^2}{4agdt^2}$; dove μ è una frazione estremamente piccola che ho stimato nella sezione precedente.

Scomponendo questa nuova forza MT lungo le stesse direzioni fissate PT e MT e avendo $MT : PT : MP = ds : -dx : dy$ ne risulterà

1. Una forza lungo $PT = \frac{\mu dxds}{4gadt^2}$
2. Una forza lungo $MP = \frac{\mu dyds}{4gadt^2}$

Il Pianeta in M sarà pertanto congiuntamente sollecitato da queste due forze acceleratrici

1. Lungo $MQ = \frac{ff\cos\varphi}{zz} + \frac{\mu dxds}{4agdt^2}$
2. Lungo $MP = \frac{ff\sin\varphi}{zz} + \frac{\mu dyds}{4agdt^2}$

I Principi della Meccanica ci forniscono queste due equazioni

1. $ddx = -\frac{2gffdt^2\cos\varphi}{zz} - \frac{\mu dxds}{2a}$
2. $ddy = -\frac{2gffdt^2\sin\varphi}{zz} - \frac{\mu dyds}{2a}$

dove si deve sottolineare che sia

$$x = z\cos\varphi \qquad y = z\sin\varphi \qquad \textit{pertanto}$$
$$dx = dz\cos\varphi - zd\varphi\sin\varphi \quad dy = dz\sin\varphi + zd\varphi\cos\varphi$$

$$ddx = ddz\cos\varphi - 2dzd\varphi\sin\varphi - zd\varphi^2\cos\varphi - zdd\varphi\sin\varphi$$
$$ddy = ddz\sin\varphi + 2dzd\varphi\cos\varphi - zd\varphi^2\sin\varphi + zdd\varphi\cos\varphi$$

poi,

$$ds = V\left(dx^2 + dy^2\right) = V\left(dz^2 + zzd\varphi^2\right)$$

e combinando

$$\begin{aligned} ddx\sin\varphi - ddy\cos\varphi &= -zdzd\varphi - zda\varphi \\ ddx\cos\varphi + ddy\sin\varphi &= ddz - zd\varphi^2 \end{aligned}$$

Da qui ricaviamo per il movimento del Pianeta queste due equazioni

$$\begin{aligned} 2dzd\varphi + zdd\varphi &= -\frac{\mu zd\varphi ds}{2a} \\ ddz - zd\varphi^2 &= -\frac{2gffdt^2}{zz} - \frac{\mu dzds}{2a} \end{aligned}$$

L'elemento del tempo dt è supposto costante e siccome $2gff = \frac{4\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}$ la quantità g deriva dal calcolo.
La prima di queste due equazioni essendo divisa per $zd\varphi$ dà, $\frac{2dz}{z} + \frac{dd\varphi}{d\varphi} = 0$ il cui integrale è $zzd\varphi \cdot e^{\frac{\mu s}{za}} = Ct$.
Poiché $ds\,dds = dzddz + zdzd\varphi^2 + zzd\varphi dd\varphi$, avremo moltiplicando la prima equazione per $zd\varphi$ e la seconda per dz

$$\begin{aligned} dzddz - zdzd\varphi^2 &= \frac{2gffdt^2dz}{zz} - \frac{\mu dz^2ds}{2a} \\ 2zdzd\varphi^2 + zzd\varphi dd\varphi &= \frac{-\mu zzd\varphi^2ds}{2a} \end{aligned}$$

e aggiustando

$$dsdds = \frac{-2gffdt^2dz}{zz} - \frac{\mu ds}{2a}\left(dz^2 + zzd\varphi^2\right)$$

o meglio

$$dsdds = \frac{-2gffdt^2dz}{zz} - \frac{\mu ds^3}{2a}$$

Ora la prima equazione che andiamo ad integrare, eliminando $d\varphi$ per mezzo di $zzd\varphi^2 = ds^2 - dz^2$ da cui

$$e^{\frac{\mu s}{a}}zz\left(ds^2 - dz^2\right) = CCdt^2$$

in modo che abbiamo due equazioni tra le tre variabili z, s, t.
Se la moltiplichiamo per $\frac{2}{dt^2}$, l'integrazione fornirà

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{\mu}{a}\int\frac{ds^3}{dt^2}$$

che a causa di μ pressoché evanescente si riduce a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right) - \frac{4\mu gff}{a}\int ds\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)$$

Poiché noi sappiamo che l'effetto della resistenza è estremamente piccolo, trascuriamo quindi i termini relativi a μ, e avendo queste due equazioni

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right) \quad e \quad CCdt^2 = zz\left(ds^2 - dz^2\right)$$

eliminando dt^2 troviamo

$$ds^2 = \frac{4gff}{CC} zz\left(ds^2 - dz^2\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)$$

Ponendo per abbreviazione

$$\frac{4gff}{CC} = \frac{8\pi\pi c^3}{CC\Theta\Theta} = \frac{I}{h}$$

di modo che sia

$$C = \frac{2\pi c}{\Theta}\sqrt{2ch}$$

e troveremo

$$ds = \frac{zdz\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)}}{\sqrt{\left(zz\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)-h\right)}}$$

o

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{bh}{z(z+b)}\right)}}$$

Questo valore basta per essere introdotto nei termini delle nostre equazioni che riguardano μ.

Sia quindi per abbreviare $\frac{dz}{\sqrt{\left(1-\frac{bh}{z(z+b)}\right)}} = d\sigma$, in modo che scriviamo in tutti i termini riguardanti μ la lettera σ al posto della s, e avremo le seguenti equazioni

1. $e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz\left(ds^2 - dz^2\right) = CCdt^2 = \frac{8\pi\pi c^3 h}{\Theta\Theta}dt^2$
2. $\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{8\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)\right)$
3. $e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zzd\varphi = \frac{2\pi c\sqrt{2ch}}{\Theta}dt$

dove σ è una funzione di z.

Ora, eliminando dt^2 dalle prime due equazioni, otterremo

$$e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz\left(ds^2 - dz^2\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)\right) = hds^2$$

$$ds = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)\right)}}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)-h\right)}}$$

da cui si trova s mediante z; in seguito si avrà

$$\frac{2\pi c\sqrt{2c}}{\Theta}dt = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zdz}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zz\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)-h\right)}}$$

$$d\varphi = \frac{dz\sqrt{h}}{z\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zz\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)-h\right)}}$$

Per sfruttare queste equazioni, bisogna cercare di applicarne la soluzione ad uso dell'Astronomia.

Prendendo per questa ragione $h = \frac{k}{2}$ e $b = \frac{-2k}{1-nn}$ si ha per il caso in cui la resistenza svanisce $z = \frac{k}{1+n\cos\omega}$ e $d\varphi = d\omega$ dove k esprime il semi parametro, n l'eccentricità e ω l'anomalia vera dell'orbita compresa a partire dal perielio.

Questa espressione di z nel modo molto approssimato introdotto, per avere il valore di σ, si trova

$$d\sigma = \frac{kd\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+\cos\omega)^2}$$

il quale valore sarà sempre assai esatto purché non si supponga un tempo lungo quanto tanti secoli, perché l'effetto della resistenza diverrebbe infine troppo considerevole.

Senza dilungarsi nel calcolo relativo a pochi secoli durante i quali l'effetto della resistenza rimane pressoché impercettibile, si potrà ripetere sempre lo stesso calcolo per i secoli successivi.

Poiché nel caso di resistenza nulla si ha

$$z = \frac{k}{1+n\cos\omega}$$

supponiamo che tenendo conto della resistenza si ha

$$z = \frac{k}{1+n\cos\omega+\mu u}$$

e cercando di determinare u in modo che si abbia $d\varphi = d\omega$.

Ottenendo per questo effetto

$$\frac{1}{z} = \frac{1+n\cos\omega+\mu u}{k}$$

la differenziazione ci fornirà

$$\frac{dz}{zz} = \frac{nd\omega\sin\omega-\mu du}{k}e$$

bisognerà introdurre questo valore nell'ultima equazione

$$d\varphi = \frac{dz\sqrt{h}}{z\sqrt{\left(e^{\frac{\mu r}{a}}zz\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)\right)-h\right)}}$$

che a causa di $d\varphi = d\omega$ e $e^{\frac{\mu\sigma}{a}}$ si riduce alla forma

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{h}}{zz\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)+\frac{\mu\sigma}{a}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)-\frac{h}{zz}\right)}}$$

A causa di

$$-\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)+\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right) \quad = \quad \int\sigma d\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right) =$$

$$-\int\sigma\frac{dz}{zz} = -\frac{n}{k}\int\sigma d\omega\sin\omega\int\frac{d\omega\sqrt{1+2n\cos\omega+nu}}{(1+n\cos\omega)^2}$$

si riduce a

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{h}}{zz\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{h}{zz}-\frac{\mu n}{a}\int d\omega\sin\omega\int\frac{d\omega\sqrt{1+2nu\cos\omega+nu}}{(1+n\cos\omega)^2}\right)}}$$

Essendo $\frac{1}{b} = \frac{-1+un}{2k}$ avremo $\frac{1}{z}+\frac{1}{b} = \frac{1+2n\cos\omega+nn+2\mu n}{2k}$ e poiché $h = \frac{k}{2}$ otterremo

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{h}{zz} = \frac{nn\sin\omega^2-2\mu un\cos\omega}{2k}$$

Di conseguenza (14)

$$d\omega = \frac{nd\omega\sin\omega-\mu du}{\sqrt{\left(nn\sin\omega^2-2\mu nu\cos\omega-\frac{2\mu n}{a}\int\sigma d\omega\sin\omega\right)}}$$

e prendendo il quadrato si trova, trascurando i termini che contengono $\mu\mu$

$$nnd\omega\sin\omega^2-2\mu nud\omega\cos\omega-\frac{2\mu n}{a}\int\sigma d\omega\sin\omega =$$

$$= nnd\omega\sin\omega^2-2\mu ndu\sin\omega$$

e prendendo $du\sin\omega-ud\omega\cos\omega = \frac{d\omega}{a}\int\sigma d\omega\sin\omega$ e dividendo per ω^2 e integrando si ha

$$\frac{u}{\sin\omega} = \frac{1}{a}\int\frac{d\omega}{\sin\omega^2}\int\sigma d\omega\sin\omega = \frac{-\cos\omega}{a\sin\omega}\int\sigma d\omega\sin\omega+\frac{1}{a}\int\sigma d\omega\cos\omega$$

orbene $u = \frac{1}{a}\left(\sin\omega \int \sigma d\omega \cos\omega - \cos\omega \int \sigma d\omega \sin\omega\right)$, essendo

$$\sigma = k \int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n\cos\omega + un)}}{(1 + n\cos\omega)^2}$$

Purché l'eccentricità n sia minore di 1, come avviene sempre se il pianeta si muove su di un ellisse, l'arco σ si riduce a una espressione infinita

$$\sigma = k\left(A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + ...\right)$$

allora, per trovare più facilmente il valore di u, prendiamo il differenziale dell'equazione $du\sin\omega - ud\omega\cos\omega = \frac{d\omega}{a}\int \sigma d\omega \sin\omega$ che è

$$ddu\sin\omega + ud\omega^2\sin\omega = \frac{d\omega^2}{a}\sigma\sin\omega$$

o

$$\frac{ddu}{d\omega^2} + u = \frac{\sigma}{a} = \frac{k}{a}\left(A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + ...\right)$$

Poniamo poi

$$u = \alpha\omega + \zeta\sin\omega + \Delta\omega\cos\omega + \gamma\sin 2\omega + \delta\sin 3\omega + ...$$

poiché

$$\frac{du}{d\omega} = \alpha + \zeta\cos\omega + \Delta\cos\omega + 2\gamma\cos 2\omega + 3\delta\cos 3\omega + ...$$

e

$$\frac{ddu}{d\omega^2} = -\zeta\sin\omega - 2\Delta\sin\omega - 4\gamma\sin 2\omega - 9\delta\sin 3\omega + ... - \Delta\omega\cos\omega$$

troviamo

$$\frac{ddu}{d\omega^2} + u = \alpha\omega - 2\Delta\sin\omega - 3\gamma\sin 2\omega - 8\delta\sin 3\omega - ...$$

da cui concludiamo che si ha

$$\begin{array}{ccc} \alpha & = & \frac{Ak}{a} \\ \Delta & = & -\frac{Bnk}{2a} \\ \gamma & = & -\frac{Cn^2k}{3a} \\ \delta & = & -\frac{Dn^3k}{8a} \\ ecc & & \end{array}$$

e di conseguenza

$$u = \frac{k}{a}\left(A\omega + \zeta\sin\omega - \frac{Bn}{2}\omega\cos\omega - \frac{Cn^2}{3}\sin 2\omega - \frac{Dn^3}{8}\sin 3\omega - ...\right)$$

dove il coefficiente ζ rimane indeterminato.

Lo si potrà prendere anche uguale a 0, poiché qualsiasi valore che si attribuisce a ζ, farà cambiare l'eccentricità e il luogo dell'afelio.

Ponendo quindi

$$\int \frac{d\omega\sqrt{1 + 2n\cos\omega + un}}{(1 + n\cos\omega)^2} = A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + ...$$

si avrà, dopo che il pianeta avrà acquistato l'angolo $\varphi = \omega$, per la distanza dal Sole

$$a = \frac{k}{1 + n\cos\omega + \frac{\mu k}{a}\left(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\sin\omega - \frac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega - \frac{1}{6}Dn^3\sin 3\omega + ...\right)}$$

Infine il tempo t si troverà determinato dalla seguente equazione

$$\frac{2\pi\sqrt{ck}}{\Theta}t = \int e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zzd\omega$$

che a causa di $e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} = 1 + \frac{\mu\sigma}{2a}$ e

$$\begin{aligned} z^2 \quad = \quad & \frac{kk}{(1 + n\cos\omega)^2} - \frac{2\mu k^3}{a(1 + n\cos\omega)^3} + \\ & -\left(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\sin\omega - \frac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega - \frac{1}{6}Dn^3\sin 3\omega + ...\right) \end{aligned}$$

e

$$1 + \frac{\mu\sigma}{2a} = A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + ...$$

si cambia in

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t &= +\int\frac{d\omega}{(1+n\cos\omega)^2}\\
&- \frac{2\mu k}{a}\int\frac{d\omega\left(A\omega-\frac{1}{2}Bn\omega\sin\omega-\frac{1}{3}Cn^2\sin2\omega-\frac{1}{6}Dn^3\sin3\omega+...\right)}{(1+n\cos\omega)^3}\\
&+ \frac{\mu k}{a}\int\frac{d\omega\left(A\omega+Bn\sin\omega+Cn^2\sin2\omega+Dn^3\sin3\omega+...\right)}{(1+n\cos\omega)^2}
\end{aligned}$$

Queste formule bastano a determinare tutte le perturbazioni che la resistenza dell'etere può produrre nel moto di tutti i pianeti; essendo questo il quesito posto dall'ILLUSTRE ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE, svilupperò tutti i fenomeni che risultano nel moto dei pianeti.

Non ci si sorprenderà che io faccia una tale astrazione delle perturbazioni che i pianeti producono per mutua azione, poiché è evidente che non influiscono sull'effetto della resistenza.

Considererò quindi tre casi, il primo dei quali sarà quello in cui l'orbita del pianeta non ha alcuna eccentricità; il secondo nel quale l'eccentricità è molto piccola e il terzo quando è mediocre.

Primo Caso: L'orbita del Pianeta non avente alcuna eccentricità

Essendo in questo caso $n = 0$, sarà $\sigma = k\omega$; $A = 1$; $B = 0$ $C = 0$ e le seguenti. Le formule generali si muteranno quindi in

$$z=\frac{k}{1+\frac{\mu k\omega}{a}}\qquad\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t=\omega-\frac{3\mu k}{4a}\omega^2$$

dove k indica il raggio dell'orbita, a il raggio del pianeta e ω l'angolo descritto attorno al Sole dopo il tempo t. Faccio le seguenti riflessioni:

1. Dopo una rivoluzione, ponendo $\omega = 2\pi$, la distanza tra il pianeta e il Sole sarà

   $$z=\frac{k}{1+\frac{2\mu k}{a}\pi}$$

   poco più piccola dell'inizio

2. Dopo m rivoluzioni, essendo $\omega = 2m\pi$, la distanza del pianeta dal Sole sarà

   $$z=\frac{k}{1+\frac{2m\mu k}{a}\pi}$$

   il pianeta si avvicinerà sempre più al Sole, ma così impercettibilmente, che per ogni rivoluzione l'orbita non differirà da un cerchio.

3. I tempi durante i quali il pianeta percorre m rivoluzioni è

   $$t=\frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta m\left(1-\frac{3\mu k}{2a}\pi m\right)$$

   il tempo durante i quali si hanno $m+1$ rivoluzioni è

   $$t'=\frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(m+1\right)\left(1-\frac{3\mu k}{2a}\pi\left(m+1\right)\right)$$

4. Dopo m periodi, quindi, il tempo di una rivoluzione sarà

   $$t'-t=\frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1-\frac{3\mu k}{2a}\pi\left(2m+1\right)\right)$$

   Da ciò si vede che il tempo periodico tende a diminuire essendo il primo $\frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta$.

5. La resistenza dell'etere produrrà quindi due effetti sul moto dei pianeti; il primo sarà che la distanza del pianeta dal Sole diminuisce e il secondo che il tempo periodico del pianeta diviene più breve. Il moto rimane circolare, senza che ne risulti una eccentricità

Supponiamo che l'eccentricità della Terra sia nulla, e applichiamo le formule trovate in questo caso:

Abbiamo quindi $k = c$, e $\Theta = 365^g\, 6^h\, 9'\, 35" = 31558176"$ che è il tempo periodico rispetto alle stelle fisse.

Ponendo poi la parallasse orizzontale del Sole uguale a 12", avremo $\frac{k}{a} = 17000$ e $\frac{3pik}{2a} = 77000$.

Dopo m rivoluzioni, quindi, la diminuzione del tempo periodico sarà di $77000 \times 31558176 \times \mu\,(2m+1)$ secondi, che si calcolo introducendo per μ il valore dato sopra per stima $\mu = \frac{1}{10000000000000}$ secondi circa $0,2429979552 \times (2m+1)$ secondi, cioè $\frac{243}{1000}\,(2m+1)$.

E pertanto dopo un secolo la diminuzione dell'anno solare sarà di $\frac{201 \times 243}{1000}$ cioè 49 secondi.

Poiché questa diminuzione secolare è evidentemente troppo grande, essendo minore di 5 secondi, ne segue che la parte μ è almeno 10 volte più piccola di quanto qui supposta.

Sembra quindi che il numero λ impiegato debba superare 100, a meno che non si voglia diminuire la densità dell'etere a spese della sua elasticità. L'una o l'altra scelta sembrano equiprobabili[1].

Secondo caso: L'orbita del pianeta avente una piccola eccentricità

Sia n la parte che esprime l'eccentricità, così piccola da essere trascurato nel calcolo il suo quadrato nn, e otterremo per l'arco σ questa espressione (16b)

$$\sigma = k \int d\omega\,(1 + n\cos\omega)\,(1 - 2n\cos\omega) = k \int d\omega\,(1 - n\cos\omega)$$

da cui

$$\sigma = k\,(\omega - n\sin\omega)$$

e prendendo $A = 1$ e $B = -1$.

Quando il pianeta avrà percorso nella sua orbita l'angolo col Sole ω, avremo la sua distanza dal Sole

$$z = \frac{k}{1 + n\cos\omega + \frac{\mu k}{a}\left(\omega + \frac{1}{2}n\omega\cos\omega\right)}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t &= \int d\omega\,(1 - 2n\cos\omega) - \frac{2\mu k}{a}\int d\omega\,(1 - 3n\cos\omega)\left(\omega + \frac{1}{2}n\omega\cos\omega\right) \\ &\quad + \frac{\mu k}{2a}\int d\omega\,(1 - 2n\cos\omega)\,(\omega - n\sin\omega)\end{aligned}$$

o

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t = \omega - 2n\sin\omega - \frac{\mu k}{2a}\int d\omega\,(3\omega - 8n\omega\cos\omega + n\sin\omega)$$

e integrando

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t = \omega - 2n\sin\omega - \frac{\mu k}{2a}\left(\frac{1}{2}\omega^2 - 8n\omega\sin\omega - 9n\cos\omega\right)$$

dove k indica il semi parametro, o piuttosto la distanza media tra il pianeta e il Sole.

Esaminiamo dapprima l'orbita del pianeta, dopo che ha compiuto m rivoluzioni; poniamo per questo effetto $\omega = 2\pi m\varphi$, in modo che φ indica l'angolo percorso nella rivoluzione successiva; e la distanza del pianeta dal Sole sarà espressa da

$$z = \frac{k}{1 + n\cos\varphi + \frac{\mu k}{a}\,(2\pi m + \varphi)\left(1 + \frac{1}{2}n\cos\varphi\right)}$$

Si evidenzia qui che questa distanza non è la più piccola o $\varphi = 0$, come avverrebbe in assenza di resistenza, ma dove

$$\varphi = \frac{\mu k\left(1 + \frac{1}{2}n\right)}{n\,(a + \mu\pi mk)} = \frac{\mu k}{na}$$

di modo che durante questo tempo la linea degli absidi è avanzata dell'angolo

$$\frac{\mu k\left(1 + \frac{1}{2}n\right)}{n\,(a + \mu\pi mk)}$$

[1]Se si supponesse la parallasse orizzontale del Sole di 9 secondi, come si ricava dall'ultimo passaggio di Venere sul disco del Sole: si avrebbe $\frac{k}{a} = 22000$ e $\frac{3\pi k}{2a} = 100000$ circa, poiché non si è ancora troppo sicuri della parallasse del Sole, che potrebbe essere benissimo di 8 o 9 secondi, ci sarà sempre permesso di prendere $\frac{k}{a}$ e $\frac{3\pi k}{2a}$ come numeri tondi.

La diminuzione del tempo periodico sarà quindi dopo m rivoluzioni di $100000 \times 31558176 \times \mu \times (2m+1)$ secondi, o ancora di $\frac{315}{1000}\,(2m+1)$ secondi, e dopo un secolo di 63 secondi.

Siccome questa diminuzione dell'anno solare è ancora maggiore di quella che si è ottenuta supponendo la parallasse solare di 12", la parte μ deve per un motivo ancora maggiore essere minore di 1 : 10 miliardi, e anche minore di 1 : 100 miliardi.

Ponendo quindi $m = 0$, la resistenza dell'etere fa sì che, dal primo movimento, il perielio corrisponda all'angolo $\frac{\mu k\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{na}$ e pertanto, dopo m rivoluzioni, il perielio sarà indietreggiato di $\frac{\mu\mu\pi mkk\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{na(a+\mu\pi mk)}$ ossia di $\frac{\mu\mu\pi m}{n}\cdot\frac{kk}{aa}$ ciò che è assolutamente impercettibile; poiché, se μ è estremamente piccolo, non si potrà più distinguere il perielio.

Ora, per trovare la più piccola distanza del pianeta dal Sole, basta porre $\varphi = \frac{\mu k}{na}$ e si avrà l'espressione

$$z = \frac{k}{1+n+\frac{\mu k}{na}\cdot 2\pi m\left(1+\frac{1}{2}n\right)}$$

O, ponendo $\varphi = \pi + \frac{\mu k}{na}$, la più grande distanza del pianeta dal Sole sarà

$$z = \frac{k}{1-n+\frac{\mu k}{a}\cdot \pi\left(2m+1\right)\left(1-\frac{1}{2}u\right)}$$

Ma, poiché l'eccentricità n è estremamente piccola, e l'effetto diviene osservabile solo quando il numero m è assai grande, avremo la più piccola distanza

$$= \frac{k}{1+\frac{2\pi\mu mk}{a}+n\left(1+\frac{\pi\mu mk}{a}\right)}$$

e la più grande distanza

$$= \frac{k}{1+\frac{2\pi\mu mk}{a}-n\left(1+\frac{\pi\mu mk}{a}\right)}$$

Dopo m rivoluzioni del pianeta, troviamo il semi parametro della sua orbita

$$= \frac{ak}{a+2\pi\mu mk} = k\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)$$

e l'eccentricità

$$= n\cdot\frac{a+\pi\mu mk}{a+2\pi\mu mk} = n\left(1-\frac{\pi\mu mk}{a}\right)$$

Da ciò vediamo che la resistenza dell'etere diminuisce tanto il parametro che l'eccentricità dell'orbita dei pianeti.

Per trovare il tempo durante il quale il pianeta percorre m rivoluzioni attorno al Sole, si otterrà, ponendo $\omega = 2\pi m$

$$t = \frac{\Theta k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\left(m-\frac{3\pi\mu nmk}{2a}+\frac{9\mu nk}{4\pi a}\right)$$

Pertanto, essendo il tempo di $m+1$ rivoluzioni

$$t = \frac{\Theta k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\left(m+1-\frac{3\pi\mu m\left(m+1\right)^2 k}{2a}-\frac{9\mu nk}{4\pi a}\right)$$

dopo che il pianeta ha percorso m rivoluzioni, il suo tempo periodico sarà

$$\frac{\Theta k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\left(1-\frac{3\pi\mu k}{2a}\left(m+1\right)\right)$$

come trovato nel caso precedente.

Così un'eccentricità molto piccola non cambia nulla nella diminuzione del tempo periodico, e il cambiamento dell'eccentricità stessa è così piccola che sarà quasi impossibile da valutare anche dopo il più grande numero di rivoluzioni.

Se, per esempio, per la Terra il valore di $\frac{3\pi\mu k}{2a}\Theta$ è $\frac{243}{10000}$, prendendo μ dieci volte più piccolo di quanto prima stimato, avremo circa

$$\begin{aligned} \frac{3\pi\mu k}{2a} &= \frac{1}{41\times 31558176} \\ \frac{\pi\mu k}{a} &= \frac{1}{2000\,000\,000} \end{aligned}$$

l'eccentricità sarà quindi dopo m rivoluzioni $n\cdot\left(1-\frac{m}{2000\,000\,000}\right)$ da cui si vede che anche dopo 100000 rivoluzioni questa diminuzione non sarà ancora percettibile.

Il semi parametro dell'orbita della Terra sarà ancora dopo m rivoluzioni $= c\left(1-\frac{m}{21000\,000\,000}\right)$.

Terzo Caso: L'orbita del pianeta è considerevolmente eccentrica

Supporrò qui che l'eccentricità n sia maggiore di prima, ma sempre più piccola dell'unità; poiché $n = 1$ rappresenta un'orbita parabolico per il pianeta, il cui sviluppo non è di alcuna utilità.

Le potenze di n divengono quindi sempre più piccole in modo da poter trascurare quelle più alte del cubo n^3 o anche del quadrato del quadrato n^4.

Sviluppiamo dapprima l'integrale

$$\int \frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+n\cos\omega)^2}$$

e come sviluppo in serie diamo

$$\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)} = \left.\begin{array}{ll} +1 & -+n \\ +\frac{1}{2}n^2 & -\frac{1}{2}n^3 \\ -\frac{1}{8}n^4 & \end{array}\right\} \cos\omega \quad \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2}n^2 \\ \\ +\frac{3}{4}n^4 \end{array}\right\} \cos\omega^2 \cos\omega^2+\tfrac{1}{2}n^3\cos\omega^3-\tfrac{1}{8}n^4\cos\omega^4$$

$$\frac{1}{(1+n\cos\omega)^2}=1-2n\cos\omega+3n^2\cos\omega^2-4n^3\cos\omega^2+5n^4\cos\omega^4$$

e trarremo il valore della formula

$$\frac{\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+n\cos\omega)^2} = \left.\begin{array}{ll} +1 & -n \\ +\frac{1}{2}n^2 & \\ & -\frac{1}{2}n^3 \\ -\frac{1}{8}n^4 & \end{array}\right\} \cos\omega \quad \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}n^2 \\ \\ \\ +\frac{13}{4}n^4 \end{array}\right\} \cos\omega^2+\tfrac{1}{2}n^3\cos\omega^3-\tfrac{17}{8}n^4\cos\omega^4$$

e poiché $\cos\omega^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega$; $\cos\omega^3 = \frac{3}{4}\cos\omega+\frac{1}{4}\cos 3\omega$; $\cos\omega^4 = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\omega+\frac{1}{8}\cos 4\omega$ questa espressione si riduce a

$$\left.\begin{array}{ll} +1 & -n \\ +\frac{3}{4}n^2 & -\frac{9}{8}n^3 \end{array}\right\}\cos\omega \quad \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{4}n^3 \\ +\frac{9}{16}n^4 \end{array}\right\}\cos 2\omega+\tfrac{1}{8}n^3\cos 3\omega-\tfrac{17}{64}n^4\cos 4\omega+\tfrac{45}{64}n^4$$

da cui calcolando l'integrale

$$\int\frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+n^2)}}{(1+n\cos\omega)^2} = \left.\begin{array}{l} +1 \\ +\frac{1}{4}n^2 \\ \frac{4}{6}\,\frac{5}{4}n^4 \end{array}\right\}\omega \quad \left.\begin{array}{l} -n \\ -\frac{9}{8}n^3 \end{array}\right\}\sin\omega \quad \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{8}n^2 \\ +\frac{9}{12}n^4 \end{array}\right\} \sin 2\omega+\tfrac{1}{24}n^3\sin 3\omega-\tfrac{17}{256}n^4\sin 4\omega$$

e ponendo

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1+\frac{3}{4}n^2+\frac{4}{6}\,\frac{5}{4}n^4 \\ B & = & -1-\frac{9}{8}n^2 \\ C & = & \frac{1}{8}+\frac{9}{32}n^2 \\ D & = & \frac{1}{24} \\ E & = & -\frac{17}{256} \end{array}$$

Abbiamo poi la distanza del pianeta dal Sole

$$z = \frac{k}{1+n\cos\omega+\frac{\mu k}{a}\quad\left\{A\omega-\frac{1}{2}Bn\omega\cos\omega-\frac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega-\frac{1}{6}Dn^3\sin 3\omega-\frac{1}{25}En^4\sin 4\omega\right\}}$$

Infine, per l'espressione del tempo, abbiamo

$$\int\frac{d\omega}{(1+n\cos\omega)^2} = \left.\begin{array}{l} +1 \\ +\frac{3}{2}n^2 \\ \frac{15}{48}n^4 \end{array}\right\}\omega \quad \left.\begin{array}{l} -2n \\ +3n^3 \end{array}\right\}\sin\omega \quad \left.\begin{array}{l} +\frac{31}{4}n^2 \\ +\frac{5}{4}n^4 \end{array}\right\} \sin 2\omega-\tfrac{1}{3}n^3\sin 3\omega+\tfrac{5}{12}n^4\sin 4\omega$$

e le due altre formule si raggruppano nella seguente

$$\frac{\mu k}{2a}\int d\omega \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} -3 \\ -\frac{39}{4}n^2 \\ -\frac{1263}{64}n^4 \end{array}\right\}\omega \quad \left.\begin{array}{l} +8n \\ +\frac{93}{4}n^3 \end{array}\right\}\omega\cos\omega \quad \left.\begin{array}{l} -\frac{15}{2}n^2 \\ -22n^4 \end{array}\right\}\omega\cos 2\omega+6n^3\omega\cos 3\omega-\frac{35}{8}n^4\omega\cos 4\omega \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} -n \\ -\frac{9}{4}n^3 \end{array}\right\}\sin\omega \quad \left.\begin{array}{l} +\frac{31}{24}n^2 \\ +\frac{163}{45}n^4 \end{array}\right\}\sin 2\omega-\frac{5}{16}n^3\sin 3\omega+\frac{879}{1280}n^4\sin 4\omega \end{array}\right.$$

da cui per il tempo t, si trova

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t= \left.\begin{array}{l} +1 \\ +\frac{1}{2}n^2 \\ +\frac{15}{8}n^4 \end{array}\right\}\omega \quad \left.\begin{array}{l} -2n \\ -3n^3 \end{array}\right\}\sin\omega \quad \left.\begin{array}{l} +\frac{3}{4}n^2 \\ +\frac{51}{4}n^4 \end{array}\right\}\sin 2\omega-\tfrac{1}{3}n^3\sin 3\omega+\tfrac{5}{32}n^4\sin 4\omega+\mu k+$$

$$+\frac{\mu k}{2a}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}-\frac{3}{2}\\ -\frac{39}{8}n^2\\ -\frac{1263}{128}n^4\end{array}\right\}\omega^2 \qquad \left.\begin{array}{c}+8n\\ +\frac{93}{4}n^3\end{array}\right\}\omega\sin\omega \qquad \left.\begin{array}{c}-\frac{15}{4}n^2\\ -11n^4\end{array}\right\}\omega\sin 2\omega+2n^3\omega\sin 3\omega-\frac{35}{32}n^4\omega\sin 4\omega \\ \qquad\qquad\qquad \left.\begin{array}{c}+9n\\ +\frac{51}{2}n^3\end{array}\right\}\cos\omega \qquad \left.\begin{array}{c}-\frac{125}{28}n^2\\ -\frac{691}{90}n^4\end{array}\right\}\cos 2\omega+\frac{37}{48}n^3\cos 3\omega-\frac{2279}{5120}n^4\cos 4\omega \end{array}\right.$$

E se indichiamo con h il semiasse maggiore, poiché

$$h=\frac{k}{nn} \qquad k\sqrt{k}=\left(1-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{8}n^4\right)h\sqrt{h}$$

avremo

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta h\sqrt{h}}t \quad =\omega-2n\sin\omega \qquad \left.\begin{array}{c}+\frac{3}{4}n^2\\ +\frac{1}{8}n^4\end{array}\right\}\sin 2\omega-\frac{1}{3}n^3\sin 3\omega+\frac{5}{32}n^4\sin 4\omega+$$

$$-\frac{\mu k}{a}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}+\frac{3}{4}\\ +\frac{21}{16}n^2\\ +\frac{399}{256}n^4\end{array}\right\}\omega^2 \qquad \left.\begin{array}{c}-4n\\ -\frac{45}{8}n^3\end{array}\right\}\omega\sin\omega \qquad \left.\begin{array}{c}+\frac{15}{8}n^2\\ +\frac{43}{16}n^4\end{array}\right\}\omega\sin 2\omega-n^3\omega\sin 3\omega+\frac{35}{64}n^4\omega\sin 4\omega \\ \qquad\qquad\qquad \left.\begin{array}{c}-\frac{9}{2}n\\ -6n^3\end{array}\right\}\cos\omega \qquad \left.\begin{array}{c}+\frac{121}{96}n^2\\ +\frac{41}{24}n^4\end{array}\right\}\cos 2\omega-\frac{37}{96}n^3\cos 3\omega+\frac{2279}{10240}n^4\cos 4\omega \end{array}\right.$$

Supponiamo che il pianeta abbia compiuto m rivoluzioni e per quanto segue poniamo $\omega=2\pi m+\varphi$.
Allora la distanza del pianeta dal Sole sarà

$$z=\frac{k}{\frac{\mu k}{a}\left\{\begin{array}{cc}2\pi Am & -\pi Bmn\\ +A\varphi & -\frac{1}{2}Bn\varphi\end{array}\right\}\cos\varphi-\frac{1}{3}Cn^2\sin 2\varphi-\frac{1}{8}Dn^3\sin 3\varphi-\frac{1}{25}En^4\sin 4\varphi}$$

E poiché i termini che non contengono il numero m sono trascurabili, l'orbita subirà lo stesso cambiamento del caso precedente. Essa si restringerà un poco, e l'eccentricità diverrà minore, ma in modo impercettibile. Il luogo dell'afelio o del perielio non subirà alcun cambiamento percettibile. L'unico effetto che la resistenza dell'etere è in grado di produrre in modo osservabile, consiste nella diminuzione del tempo periodico; che conviene esaminare più accuratamente.

Determinazione della diminuzione del tempo periodico causata dalla resistenza dell'etere.

Mentre il pianeta percorre m rivoluzioni, trascorre un tempo t, di modo che, ponendo $\omega=2\pi m$, si ha

$$\frac{c\sqrt{c}}{k\sqrt{k}}\frac{t}{\Theta}=m-\frac{\mu k}{a}\left.\begin{array}{c}+\frac{3}{2}\\ +\frac{9}{8}n^2\\ +\frac{399}{128}n^4\end{array}\right\}\pi mm-\frac{9n}{4\pi}+\frac{121n^2}{192\pi}-\frac{613n^3}{192\pi}+\frac{59317n^4}{61440\pi}$$

allo stesso modo si avrà anche il tempo di $m+1$ rivoluzioni.

Quindi, dopo che il pianeta avrà compiuto m rivoluzioni, il tempo periodico della rivoluzione successiva sarà

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1-\frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1+\frac{1}{4}n^2+\frac{133}{64}n^4\right)\cdot(2m+1)\right)$$

o

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1-\frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1-\frac{1}{4}n^2+\frac{85}{64}n^4\right)\cdot(2m+1)\right)$$

E allora il semi parametro che era inizialmente k sarà

$$k=\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)$$

e l'eccentricità

$$=n\left(1-\frac{\pi\mu mk}{a}\right)$$

e il semiasse

$$=\frac{k\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)}{1-nn\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)}=h\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)$$

Il tempo periodico del pianeta sarebbe stato uguale a T se non avesse avuto resistenza: poiché $T = \frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta$ e trascurando l'eccentricità, il tempo periodico sarà dopo m rivoluzioni

$$T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\left(2m+1\right)\right)$$

A causa della resistenza il primo tempo periodico

$$T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\right)$$

dopo m rivoluzioni la sua diminuzione sarà

$$\frac{3\pi\mu h}{a}mT$$

Per quanto piccola sia questa diminuzione, l'effetto deve divenire percepibile dopo molti secoli.

Supponiamo che il tempo periodico di un pianeta sia attualmente uguale a T; sia poi il tempo periodico della Terra attorno al Sole per questa epoca uguale a Θ, e se poniamo che durante m rivoluzioni il tempo periodico del pianeta diminuisce dell'intervallo di tempo $= m\theta$, avremo $\theta = \frac{3\pi\mu h}{a}T$ e pertanto $\frac{3\pi\mu h}{a} = \frac{\theta}{T}$.

Ora, si calcoli tramite le Tavole del moto medio di questo pianeta col metodo ordinario, come se il tempo periodico T rimanesse sempre lo stesso: e poiché al tempo T corrisponde il moto medio 2π, si avrà per un anno, o per il tempo Θ, il moto medio $\frac{2\pi\Theta}{T}$, e per il tempo di N anni, questo moto medio sarà $\frac{2\pi N\Theta}{T}$. A causa della resistenza dell'etere, il moto medio del pianeta per lo stesso tempo di N anni sarà diverso.

Per m trovato $t = N\Theta$, e l'angolo ω, omettendo i termini contenenti il seno e coseno, darà il suo moto medio reale.

Quindi, poiché $\frac{c\sqrt{c}}{k\sqrt{k}} = \frac{\Theta}{T}$, avremo questa equazione

$$\frac{2\pi N\Theta}{T} = \omega - \frac{3\mu h}{4a}\omega^2 = \omega - \frac{\theta\omega^2}{\pi T}$$

oppure

$$\omega = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\pi N^2\Theta^2\theta}{T^3}$$

Bisogna quindi aggiungere invece del mezzo trovato con le tavole ordinarie del moto medio, la parte $\frac{\pi N^2\Theta^2\theta}{T^3}$ o $180° \cdot N^2 \cdot \frac{\Theta^2\theta}{T^3}$.

Questa stessa correzione si ha, sia che N indichi un numero positivo o negativo. Se le tavole dei moti medi sono state quindi stilate sul tempo periodico T di una certa epoca, che dopo m rivoluzioni diminuisce della parte $m\theta$, allora per N anni, molto prima di questa epoca, bisognerà aggiungere alla longitudine media la parte $180° \cdot N^2 \cdot \frac{\Theta^2\theta}{T^3}$.

Se $T : \theta = 360° : \delta$,questo piccolo arco δ esprimerà il moto medio del pianeta che corrisponde al tempo θ, e la nostra correzione della longitudine media sarà $\frac{1}{2}\delta N^2\frac{\Theta^2}{T^2}$, dove Θ indica il tempo di un anno.

Se poniamo la distanza media tra il Sole e la Terra uguale a c e il pianeta uguale a h, a causa di $\frac{\Theta^2}{T^{32}} = \frac{c^3}{h^3}$, la nostra correzione sarà uguale a $\frac{1}{2}\delta N^2\frac{c^3}{h^3}$; ora questa frazione $\frac{c^3}{h^3}$ si determina facilmente dalle tavole.

Siccome questa correzione è proporzionale al quadrato dell'intervallo di tempo, per quanto piccola sia la diminuzione δ da una rivoluzione alla successiva, essa deve diventare alquanto considerevole in un intervallo di alcune migliaia di anni.

Per l'uso dell'Astronomia, questo effetto della resistenza dell'etere sul tempo periodico dei pianeti potrebbe essere più comodamente rappresentata da una correzione del moto medio, e così essa farà.

Prima di stabilire il moto medio per una certa epoca, e avendo dedotto una Tabella delle longitudini medie per tutti gli anni, molto prima di questa epoca, la longitudine media sarà corretta solo per questa stessa epoca: per tutti gli altri tempi che differiscono di N anni, prima o dopo tale epoca, basterà aggiungere alla longitudine media tabellare la parte $\frac{1}{2}\delta N^2\frac{c^3}{h^3}$ o $\frac{1}{2}\delta N^2\frac{\Theta^2}{T^2}$ e dopo un anno $\frac{1}{2}\delta\frac{\Theta^3}{T^3}$.

Sia questa correzione di un anno uguale ad α, e poiché $\delta = 2\alpha\frac{T^2}{\Theta^2}$, avremo $\theta = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T^3}{\Theta^2}$, di conseguenza $\frac{3\pi\mu h}{a} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T^2}{\Theta^2}$, o

$$\alpha = \frac{3\pi\pi\mu h}{a} \cdot \frac{\Theta^2}{T^2} = 3\pi\pi\mu \cdot \frac{c^3}{ah^2}$$

di modo che per un anno la correzione sia reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza media del pianeta dal Sole moltiplicata per il semidiametro del corpo del pianeta.

Basta quindi aver determinato questa correzione per un pianeta, e sarà facile dedurla per tutte le altre.

Non vi è alcun dubbio che le osservazioni del Sole non siano le più appropriate per fornirci i chiarimenti necessari su questo importante aspetto; e se si può determinare la correzione α di un anno per il Sole, se ne dedurrà facilmente il valore della frazione μ risultante dalla resistenza dell'etere: poiché a causa di $h = c$ si avrà

$$\mu = \frac{\alpha a}{3\pi^2 c}$$

Sebbene la correzione αdi un anno sia così piccola da sfuggire alle maggiori attenzioni degli Astronomi, essa diviene, come già mostrato, molto significativa per un grande numero di anni. Essendo questa correzione per un intervallo N

di anni uguale a $NN\alpha$, per un secolo sarà uguale a $10000\,\alpha$, e per dieci secoli $1000000\,\alpha$. Consultando quindi le più antiche osservazioni, non sarà difficile trarre il valore corretto della correzione annuale.

Per questo effetto bisognerebbe trarre il valore di un anno solare medio dalle più moderne osservazioni, fatte nell'arco di mezzo secolo; si dovrebbero poi stilare delle Tavole del moto medio e della longitudine media del Sole per i periodi più antichi, nei quali si trovano buone osservazioni.

Per un periodo che precede l'attuale di N anni, si confronterà la longitudine media tratta da queste Tavole con quella derivante dalle osservazioni antiche; e se si trovasse che questa superi quelle della quantità Q, si avrà $Q = N^2\alpha$, e pertanto

$$\alpha = \frac{Q}{N^2}$$

Ma bisognerebbe essere ben sicuri che la Terra non abbia in questo tempo subito alcuna alterazione nel suo moto dovuta a qualche cometa. Per l'azione di altri pianeti, se ne conosce bene l'effetto per poterne tenere conto in questa indagine. Tuttavia è da temere che le comete non la rendano del tutto inutile.

Il metodo di cui gli astronomi si servono per determinare il valore dell'anno solare, ci fornisce ancora un altro metodo per valutare la correzione annuale α.

Supponiamo che confrontando le osservazioni attuali con quelle fatte L anni prima, si determina la quantità dell'anno uguale ad A, e confrontandole con le osservazioni fatte M anni prima, la si trovi uguale a B.

Sia Θ il valore dell'anno solare, e θ la diminuzione annuale; pertanto, il tempo trascorso dopo L anni fino ad ora sarà $L\Theta + L^2\theta$ e il tempo trascorso dopo M anni fino ad ora sarà $M\Theta + M^2\theta$. Da ciò si avrà $A = \Theta + L\theta$ e $B = \Theta + M\theta$ e di conseguenza

$$\theta = \frac{B - A}{M - L} \qquad \Theta = A - L\theta$$

da cui si conoscerà l'anno solare vero Θ, valido per l'epoca attuale, con la diminuzione annuale θ, e infine la correzione annuale

$$\alpha = \frac{\pi\theta}{\Theta}$$

Ma, oltre alle perturbazioni possibili delle comete, si incontrano ancora altri ostacoli quasi insormontabili dal lato delle osservazioni stesse almeno nei secoli trascorsi, nelle quali, se esatte, l'errore nel valore dell'anno potrebbe essere di parecchi secondi. Siccome $B - A$ è un numero di secondi troppo poco significativo, l'errore commesso nei valori dell'anno A e B lo rende del tutto incerto. Inoltre le più antiche osservazioni non hanno solo questo difetto, ma vi è incertezza anche per il tempo in cui sono state eseguite. Soprattutto la riduzione dell'Almanacco Egizio, di cui si è servito Tolomeo, non è molto constatata nel Romano, a causa del disordine subito dall'Almanacco Romano. E quanto alle correzioni che Riccioli e altri cronologisti hanno cercato di apportare, esse sono apertamente fondate sul valore dell'anno da loro supposto; la questione sta quindi precisamente così.

Potrebbe quindi essere che i momenti delle osservazioni segnati da Tolomeo debbano essere ritardati di uno o due giorni; e allora le osservazioni antiche confrontate con le moderne darebbero incontestabilmente l'anno più lungo di quanto supposto dagli astronomi nelle tavole.

Infatti Mr. Cassini, dopo le più scrupolose ricerche sul valore dell'anno solare medio, prendendo la media di tutti i suoi risultati, lo indicò in $365^g\,5^h\,48'\,47''$, che si accorda con quello dedotto dalle proprie osservazioni. Tuttavia, nelle Tavole astronomiche, lo si pone di $365^g\,5^h\,48'\,53''\,24'''$ e quindi maggiore di $6''\,24'''$. Egli ha fatto questo cambiamento senza dubbio solo per soddisfare alle antiche osservazioni, da cui si deve concludere che queste richiedono una maggiore quantità di anni ed è ciò che prova l'effetto della resistenza dell'etere.

Così confrontando le osservazioni di Ipparco con quelle di Tolomeo ci aspettiamo di avere l'anno almeno più lungo di qualche minuto: da ciò si deve ugualmente concludere che l'anno solare medio è attualmente più corto di altre volte.

Se Mr. Cassini nelle Tavole avesse supposto l'anno di $365^g\,5^h\,48'\,47''$, il moto medio per cento anni giuliani sarebbe divenuto $0^g\,0^h\,46'\,3''$, che attualmente nelle tavole è di $0^g\,0^h\,45'\,42''$, con una differenza di $21''$. Per 200 anni la differenza sarà di $42''$, e pertanto se noi supponiamo che le Tavole di Cassini rappresentino bene la longitudine solare fino a 200 anni addietro, Tavole costruite sul valore dell'anno di $365^g\,5^h\,48'\,47''$ richiederanno per l'intervallo di due secoli la correzione di $42''$, e per quello di un secolo di $10\frac{1}{2}''$.

Ma se supponiamo il reale valore dell'anno di $365^g\,5^h\,48'\,46''$, si troverà per l'intervallo di un secolo la correzione di $12''$, e pertanto $\alpha = \frac{1}{833}''$ quindi

$$\frac{\theta}{\Theta} \times 180° = \frac{\theta \times 60 \times 60 \times 180}{31558176} = \frac{1}{833}$$

e infine

$$\theta = \frac{31558176}{833 \times 60 \times 60 \times 180}'' = 0,058''$$

che è la diminuzione annuale dell'anno e quella secolare sarà di $5''\,48'''$.

Mr. l'Abbé de la Caille ha supposto l'anno nelle sue Tavole di $365^g\,5^h\,48'\,49''$ e l'ha ricavato unicamente dalle osservazioni moderne, in modo che questo sia il giusto valore dell'anno per la media di questo secolo. In questo caso il moto medio per cento anni giuliani sarà $0^g\,0^h\,45'\,55''\,\frac{6}{10}$. Quindi se per soddisfare alle osservazioni fatte due secoli prima, basterebbe supporre il moto medio secolare di $0^g\,0^h\,45'\,42''$, e si sarebbe obbligati ad aggiungere alla longitudine media trovata dalle Tavole di Mr. de la Caille $27\frac{2}{10}''$ e siccome questa correzione deve uguagliare $40000\,\alpha$, si otterrà $\alpha = \frac{1}{1470}''$; da cui si concluderà $\theta = 0,033$ e la diminuzione secolare dell'anno uguale a $3''\ 18'''$. Da ciò sembra che si debba supporre la frazione

$$\mu = \frac{1}{150\,000\,000\,000\,000}$$

e questo si potrebbe ancora accordare assai bene con i principi stabiliti prima sulla densità dell'etere, e con il modo con cui resiste al moto dei corpi.

Non potendo ancora ben decidere con precisione, poniamo la diminuzione secolare dell'anno uguale a ν'' e a causa di $\theta = \frac{\nu}{100}$ avremo

$$\alpha = \frac{1}{536\,000\,000\,000\,000}$$

Infine, tenendo conto del semidiametro degli altri pianeti, si avrà l'aumento della loro longitudine media per l'intervallo di mille anni

per Saturno	$= 135\,\nu''$
per Giove	$= 62\,\nu''$
per Marte	$= 254\,\nu''$
per la Terra	$= 205\,\nu''$
per Venere	$= 103\,\nu''$
per Mercurio	$= 135\,\nu''$

cioè dopo aver stabilito Tavole del moto medio sul tempo periodico opportuno per ogni pianeta per il periodo proposto.

Quanto esposto prova sufficientemente che i pianeti subiscono nel loro moto qualche resistenza dell'etere, sebbene mi sia impossibile determinarne il reale valore con la sola teoria. Conosciamo solo mediante questa teoria che la resistenza deve essere molto piccola; e nulla impedisce che non sia ancora inferiore a quanto stimato.

Non solo la densità dell'etere potrebbe essere diminuita oltre quanto prima supposto, diminuendo nello stesso rapporto l'elasticità; ma l'obliquità da cui le particelle veramente solido dei pianeti ricevono l'impulso dell'etere, potrebbe ancora causare una maggiore diminuzione.

Tuttavia dubito fortemente che si possa con questo modo ridurre la diminuzione dell'anno solare al di sotto di un secondo in un secolo: mi sembra al contrario che la si potrebbe ammettere di qualche secondo senza prestare la minore attenzione alle osservazioni antiche.

Non è ancora sufficientemente provato che le osservazioni riportate da Tolomeo non debbano essere spostate indietro di un giorno. Lo stesso Riccioli segna i giorni in modo diverso nel suo Almagesto e nella sua Astronomia riformata, a causa dell'incertezza dell'Almanacco Romano. E coloro che hanno voluto meglio regolare questi tempi, si sono apertamente basati sull'ipotesi del valore immutabile dell'anno.

Ma qui incontro un antagonista temibile[2], lo scienziato Mr. Professor Mayer di Gottinga, che sostenne positivamente che l'anno solare non subisse alcuna alterazione, sebbene ammettesse una piccola alterazione nel moto medio della Luna, ciò che potrebbe già apparire come un paradosso.

Per mantenere questa ipotesi, egli respinge le osservazioni degli equinozi di Tolomeo, che la rovesciavano; poi guarda con sospetto al fatto che si sarebbe potuto commettere l'errore di un giorno nel calcolo cronologico, perché molto assurda. Dice che la differenza di un giorno produrrebbe nel moto medio della Luna una differenza di 13°, non ammissibile in alcun modo.

Io rispondo, che una tale differenza di 13° nel moto medio della Luna suppone già un moto medio ben stabilito e costante; ed è ciò di cui si ha ragione di dubitare.

Se sottraendo un giorno alle epoche di Tolomeo, si cambia conformemente il moto medio del Sole e della Luna, si conserveranno le stesse eclissi e sempre lo stesso rapporto tra il Sole e la Luna.

Oltre a ciò, non è da temere che questo aumento del moto medio non sia più in accordo con le osservazioni più moderne; il moto medio di queste ultimi secoli non è alterato, e risalendo ai secoli passati, bisogna apportare una correzione proporzionale al quadrato del tempo trascorso; da cui si vede che, quando anche questa correzione per i tempi di Tolomeo e Ipparco fosse molto considerevole, potrebbe sussistere con le osservazioni fatte dopo qualche secolo, anche risalendo fino ai tempi dell'*Albatenio*.

[2]Mr. Mayer viveva ancora quando questa Memoria fu presentata all'Accademia.